PLAN DE TABLE

un exercice domestique

POSITION DU PROBLÈME

On a une table ronde autour de laquelle on doit disposer N couples. On s'oblige à deux contraintes :

1) Alternance des hommes et des femmes.
2) Les éléments de chaque couple doivent être aussi loin que possible de leur conjoint.

La table est donc mise pour 2N couverts. Dans les schémas ci-après, les lettres F et M signifient femme et homme. Les nombres en vert sont les numéros des places autour de la table ; ils vont de 1 à 2N. Les nombres en rouge, de 1 à N, sont les numéros des couples.

Dans la suite, sans nuire à aucune généralité, le couple qui reçoit aura toujours le numéro 1, et la maîtresse de maison, F1, occupera toujours la place n°1.

RÉSOLUTION POUR UN NOMBRE IMPAIR DE COUPLES

1) Commençons par le cas très simple de 3 couples.

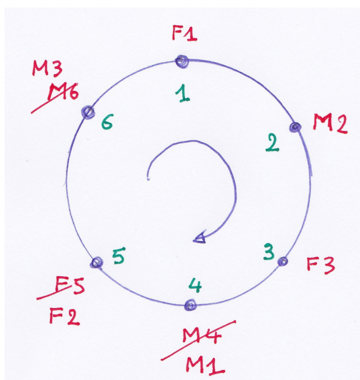

Fig. 1 - Table à 3 couples

On place donc d'abord la maîtresse de maison F1, à la place 1. A côté d'elle dans le sens des aiguilles d'une montre, à la place 2, on met l'homme du couple 2, puis la femme du couple 3, etc. On voit que les numéros en vert et ceux en rouge sont identiques tant que le numéro de la place n'est pas supérieur au nombre de couples, c'est-à-dire jusqu'à F3. En M4 il faut ramener à 1 l'indice 4 puisqu'il n'y a pas de couple 4, c'est ce qu'on appelle une permutation circulaire ; c'est donc l'homme du couple 1 (M1) qui va occuper la place 4. A partir de là les indices en rouges progressent naturellement jusqu'à 3, l'homme du couple 3 venant s'installer finalement à côté de la maîtresse de maison, l'heureux homme puisque celle-ci est par principe une femme délicieuse. On observe ainsi que chacun est situé à l'exact opposé de sa chacune, tout étant ainsi pour le mieux dans un espace structuré où chacun peut flirter à sa guise, c'est le meilleur des mondes assurément.

2) Poursuivons par le cas de 5 couples.

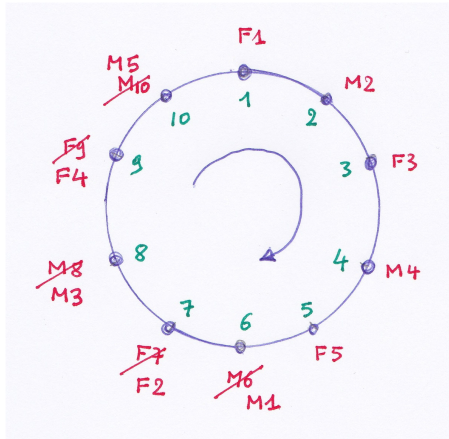

Fig. 2 - Table à 5 couples

On procède exactement de la même manière que pour 3 couples. Les numéros verts et rouges sont les mêmes jusqu'à 5, puis on ramène ensuite l'indice rouge à 1 (M1 à la place de M6 puisque M6 n'existe pas) et on repart jusqu'à 5 en alternant les F et les M. Chacun est encore à l'opposé exact de sa chacune et on peut observer que ce sera toujours le cas pour un nombre de couples impair, le cas d'un couple unique constituant une évidence triviale. La table est ainsi très facile à constituer.

RÉSOLUTION POUR UN NOMBRE PAIR DE COUPLES

Le problème se complique lorsque le nombre de couples est pair. Analysons le cas de 4 couples, puisque le cas de 2 est trivial.

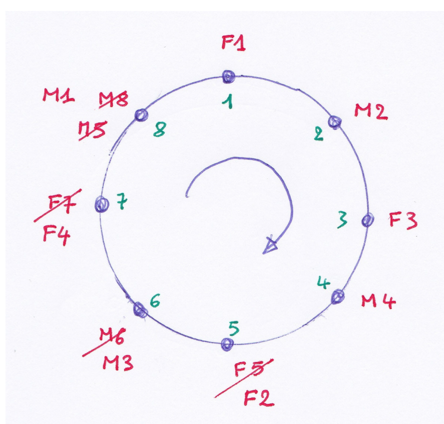

Fig. 3 - Table à 4 couples. Solution inadmissible.

Si on procède de la même manière que pour un nombre impair, le dossard rouge F1 ne peut pas être utilisé à la place 5 puisqu'il a déjà été attribué à la maîtresse de maison. C'est donc F2 que nous mettons là, suivi de M3, F4 puis M1 à la place de M5 en dernière position puisque M5 n'existe pas. Mais cette séquence n'est pas admissible puisque les éléments du couple 1 s'y retrouvent à côté l'un de l'autre. Il faut donc trouver autre chose et surtout observer que le principe simple qui s'appliquait à un nombre impair de couples ne se généralise pas ici.

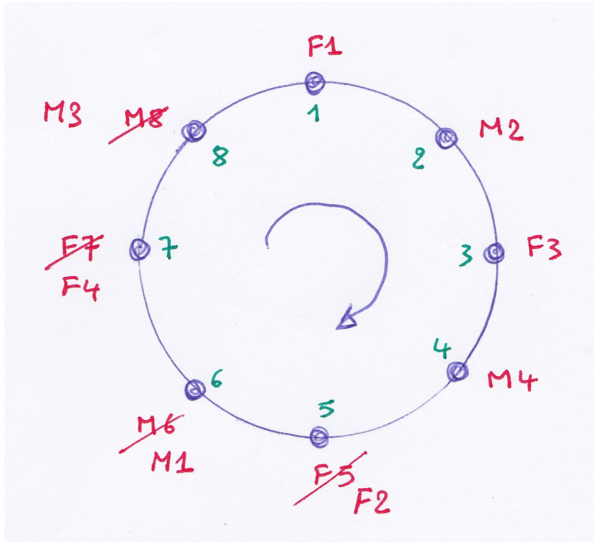

Fig. 4 - Table à 4 couples.

On s'aperçoit qu'après avoir re-initialisé l'indice féminin à la place 5 (F2 à la place de F5), il faut aussi re-initialiser l'indice masculin en place 6 (M1 à la place de M6). On incrémente ensuite de 2 les indices de couple, comme pour un nombre impair, séparément pour les hommes et pour les femmes ; ainsi après F2 la femme sera F4, et l'homme après M1 sera M3.

Pour résumer, dès que le numéro de la place devient supérieur au nombre de couples, on repart avec la séquence (F2 , M1) puis les doubles incrémentations séparées. Cela se généralise quel que soit le nombre pair de couples.

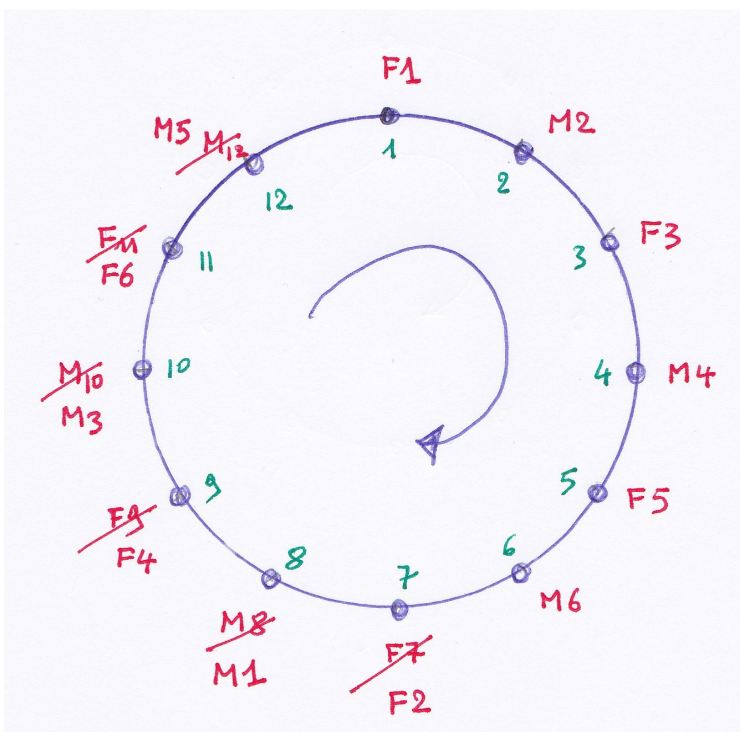

Fig. 5 - Table à 6 couples.

FORMULATION MATHÉMATIQUE

On peut établir diverses formules mathématiques permettant de trouver ces permutations d'indices. On propose ici une formule générale s'appliquant quel que soit le nombre de couples, pair ou impair.

Définissons un nombre R de la manière suivante

R = 0 si le nombre N de couples est pair
R = 1 si le nombre N de couples est impair

Note : R est le reste de la division par 2 du nombre de couples. En mathématiques on écrit : R = N (modulo 2)

Le numéro P d'une place est décomposé de la manière suivante :

$$P = N * K1 + K2$$

le signe * étant celui de la multiplication. Ainsi, pour 4 couples et pour la place n°6, on a K1 = 1 et K2 = 2. Pour 5 couples et pour la place n°3, on a K1 = 0 et K2 = 3.

Alors, après que la femme du couple 1 s'est placée en position 1, la solution générale du problème s'énonce ainsi :

1) Les places impaires sont occupées par les femmes.
2) Les places paires sont occupées par les hommes.
3) **(numéro du couple qui occupera la place P) = $K2 + (R-1) * K1 * (-1)^{K2}$**

Ainsi :

1) Pour 3 couples, la position 6 (R=1, K1 = 1, K2 = 3) à la droite de la maîtresse de maison sera l'homme du couple dont le numéro est [3- (0)*1*(-1)] = 3
2) Pour 5 couples, la position 4 (R=1, K1 = 0, K2 = 4) sera l'homme du couple dont le numéro est [4+ (0)*1*(+1)] = 4
3) Pour 5 couples, la position 7 (R=1, K1 = 1, K2 = 2) sera la femme du couple dont le numéro est [2+ (0)*1*(+1)] = 2
4) Pour 4 couples, la position 3 (R=0, K1 = 0, K2 = 3) sera la femme du couple dont le numéro est [3+ (-1)*0*(-1)] = 3
5) Pour 4 couples, la position 6 (R=0, K1 = 1, K2 = 2) sera l'homme du couple dont le numéro est [2+ (-1)*1*(1)] = 1
6) Pour 4 couples, la position 5 (R=0, K1 = 1, K2 = 1) sera la femme du couple dont le numéro est [1+ (-1)*1*(-1)] = 2
7) Pour 5 couples, la position 9 (R=1, K1 = 1, K2 = 4) sera la femme du couple dont le numéro est [4+ (0)*1*(1)] = 4
8) Pour 6 couples, la position 7 (R=0, K1 = 1, K2 = 1) sera la femme du couple dont le numéro est [1+ (-1)*1*(-1)] = 2
9) Pour 6 couples, la position 12 (R=0, K1 = 1, K2 = 6) sera l'homme du couple dont le numéro est [6+ (-1)*1*(1)] = 5

etc.

CONCLUSION

Le problème serait à reformuler pour des couples qui seraient remplacés par des groupes d'un nombre de personnes supérieur à 2. Imaginons par exemple qu'à chaque couple soit associé un même nombre (pair ou impair) d'amis arrivant avec eux. Non seulement cette configuration est singulière (!) mais encore les contraintes de placement n'auraient alors plus vraiment de sens.

Signalons enfin que pour apaiser d'éventuelles tensions entre invités, ou pour rapprocher certaines personnes qui ont des choses à se dire d'assez près, la maîtresse de maison garde la liberté d'associer les noms qu'elle souhaite aux numéros de couples. Malgré les contraintes imposées elle dispose donc d'une certaine liberté pour disposer au mieux ses invités et résoudre ainsi quelques problèmes relationnels.

Plus simplement disons que la maîtresse de maison place d'abord les femmes comme elle le souhaite en laissant une place entre elles. Dans le cas d'un nombre impair de couples, les conjoints sont placés juste en face de leurs épouses. Dans le cas d'un nombre pair la place des conjoints est décalée d'une unité, toujours dans le même sens (celui des aiguilles d'une montre dans nos exemples).

De manière compliquée on a donc démontré que tout est simple.

En principe la maîtresse de maison devrait servir un repas plus digeste que les élucubrations de votre présent serviteur. Bon appétit !

ALP